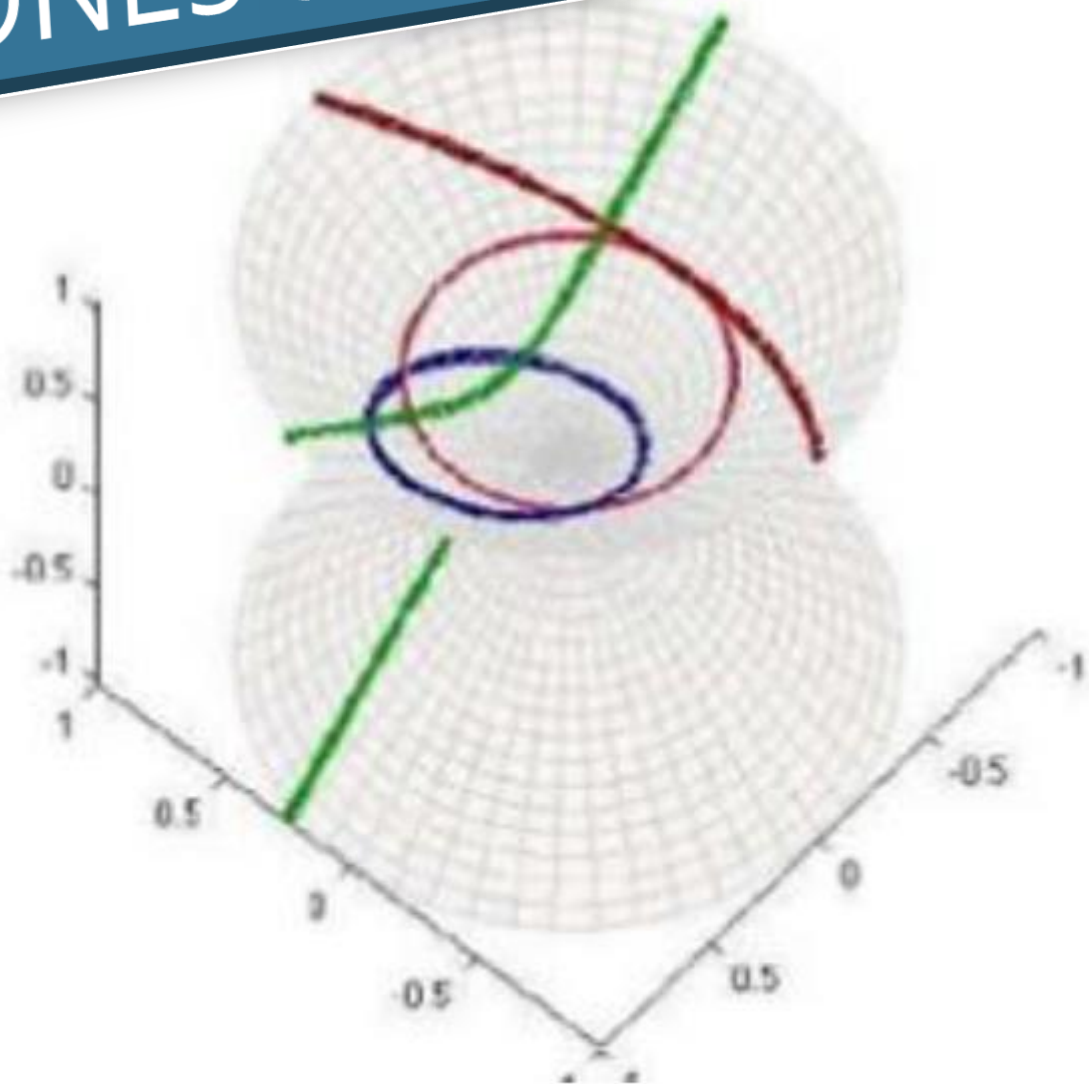
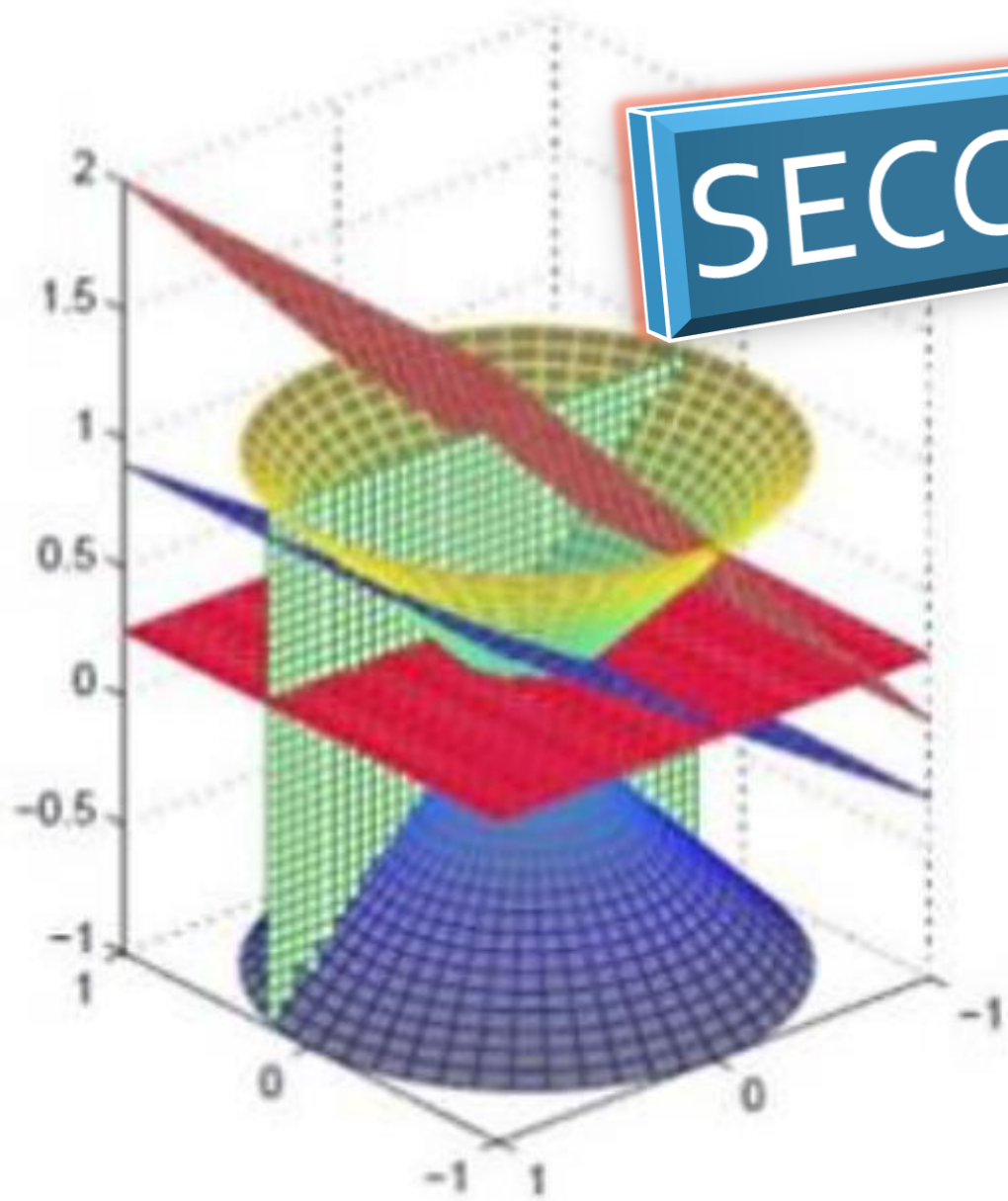


SECCIONES CONICAS





(a) Círculo



(b) Elipse



(c) Parábola

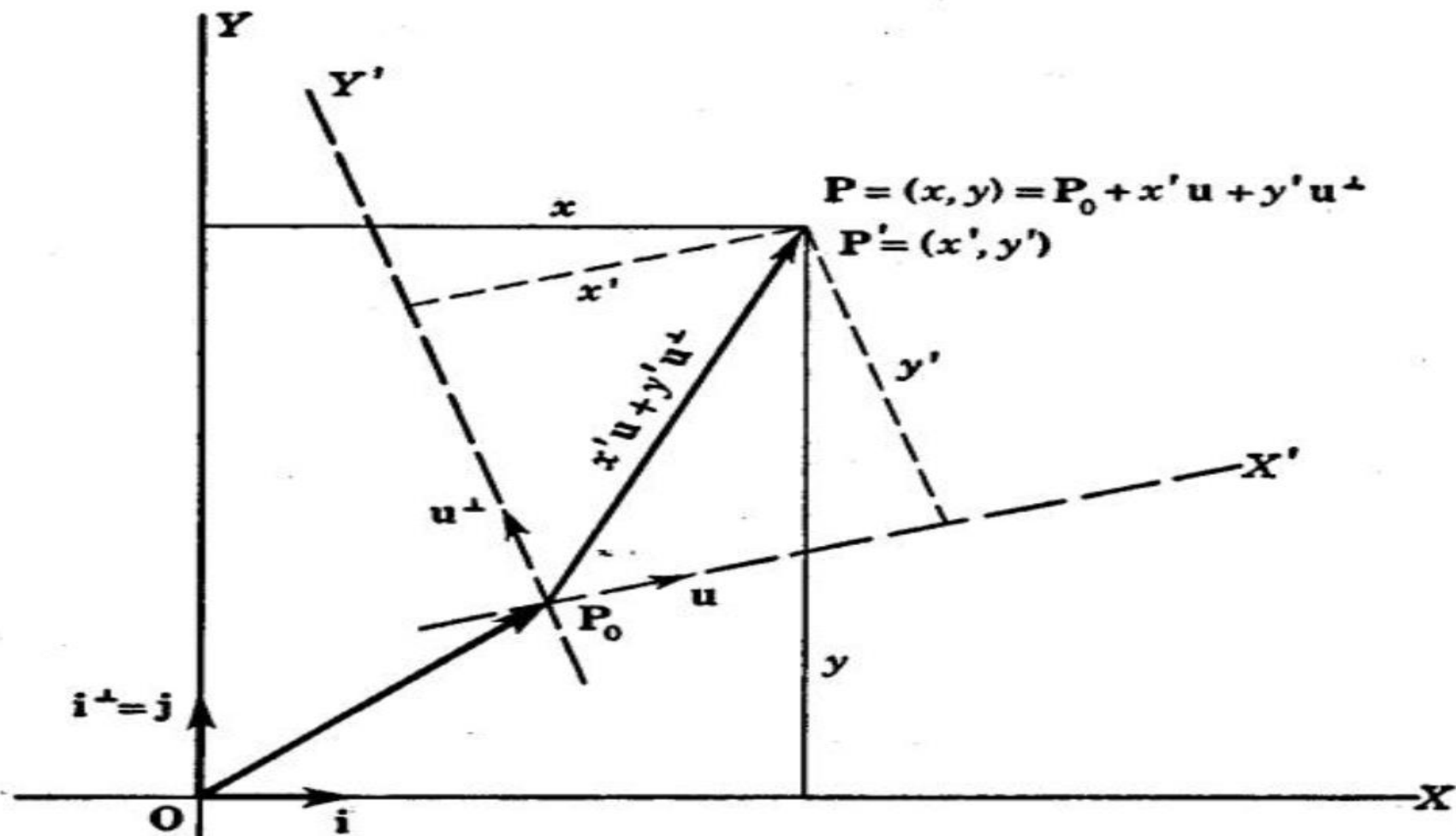


(d) Hipérbola

TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

En este caso consideraremos en este caso como si el plano \mathbb{R}^2

se moviese con respecto a él mismo y como si una transformación fuese un conjunto de instrucciones para mover el plano. Ésta es la interpretación



Designemos con X, Y los ejes coordenados originales , y con X', Y' los nuevos ejes coordenados. Suponemos que los ejes X', Y' se han obtenido de la rotación y una traslación de los ejes originales.

Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ y x_0, y_0 son las coordenadas del nuevo origen respecto a los ejes originales de coordenadas . Las nuevas coordenadas $P' = (X', Y')$ del punto cuyas coordenadas originales eran $P = (X, Y)$ están relacionadas con las coordenadas originales por:

$$\mathbf{P} = (x, y) = T(\mathbf{P}') = x' \mathbf{u} + y' \mathbf{u}^\perp + \mathbf{P}_0;$$

es decir,

$$x = u_1 x' - u_2 y' + x_0$$

$$y = u_2 x' + u_1 y' + y_0.$$

Designemos con X, Y los ejes coordenados originales , y con X', Y' los nuevos ejes coordenados. Suponemos que los ejes X', Y' se han obtenido de la rotación y una traslación de los ejes originales.

Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ y x_0, y_0 son las coordenadas del nuevo origen respecto a los ejes originales de coordenadas . Las nuevas coordenadas $P' = (X', Y')$ del punto cuyas coordenadas originales eran $P = (X, Y)$ están relacionadas con las coordenadas originales por:

$$\mathbf{P} = (x, y) = T(\mathbf{P}') = x' \mathbf{u} + y' \mathbf{u}^\perp + \mathbf{P}_0;$$

es decir,

$$x = u_1 x' - u_2 y' + x_0$$

$$y = u_2 x' + u_1 y' + y_0.$$

El número x' es la distancia dirigida desde el eje Y' al punto y el número y' es la distancia dirigida desde el eje X' al punto. Estos números x' , y' son las nuevas coordenadas del punto que en el sistema original de coordenadas tenía las coordenadas x, y . Con referencia al nuevo sistema de coordenadas denotamos al punto por $\mathbf{P}' = (x', y')$. Las nuevas coordenadas podían también ser descritas como los únicos números con la propiedad de que $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = x' \mathbf{u} + y' \mathbf{u}^\perp$. Los números son únicos puesto que \mathbf{u} y \mathbf{u}^\perp son, ciertamente, linealmente independientes.

La transformación T representando el cambio de coordenadas es la composición de la traslación

$$S(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \mathbf{P}_0$$

y la rotación

$$U(x', y') = x' \mathbf{u} + y' \mathbf{u}^\perp.$$

$T = S \circ U$. Primero se hacen girar los ejes, y luego se les traslada. Como los nuevos ejes de coordenadas son ortogonales, el nuevo sistema de coordenadas se llama, también, sistema de coordenadas rectangular o cartesiano. A partir de la ecuación de P , obtenemos las ecuaciones para las nuevas coordenadas, en términos de las coordenadas originales, resultando:

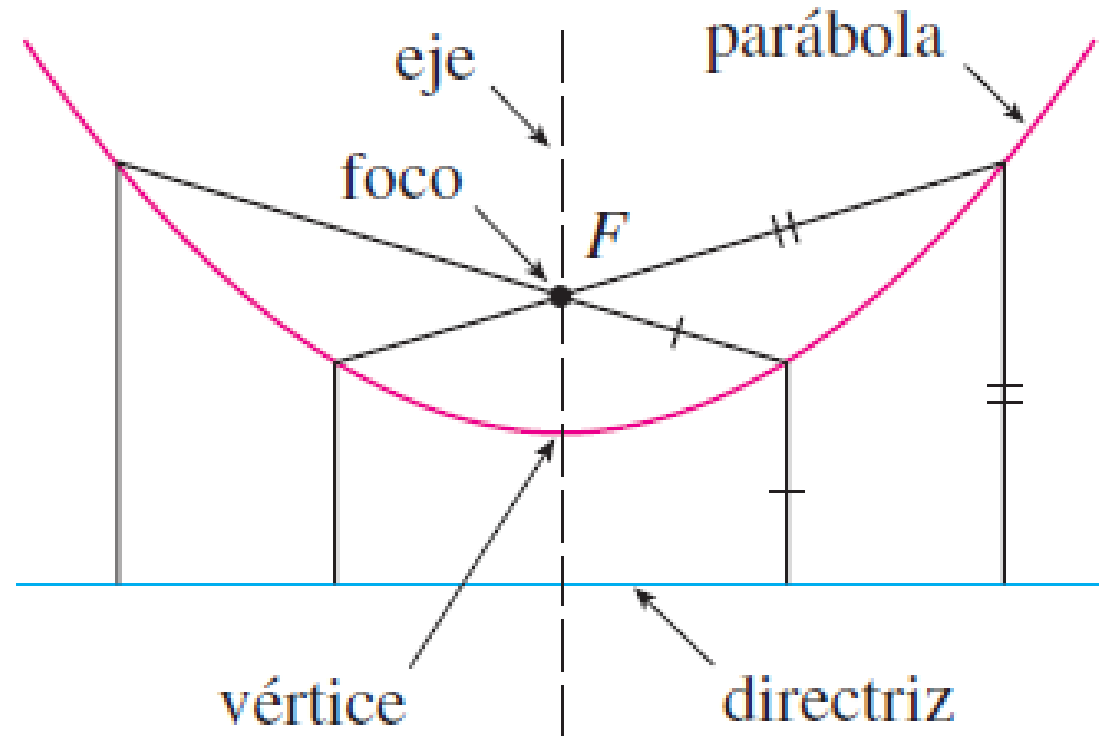
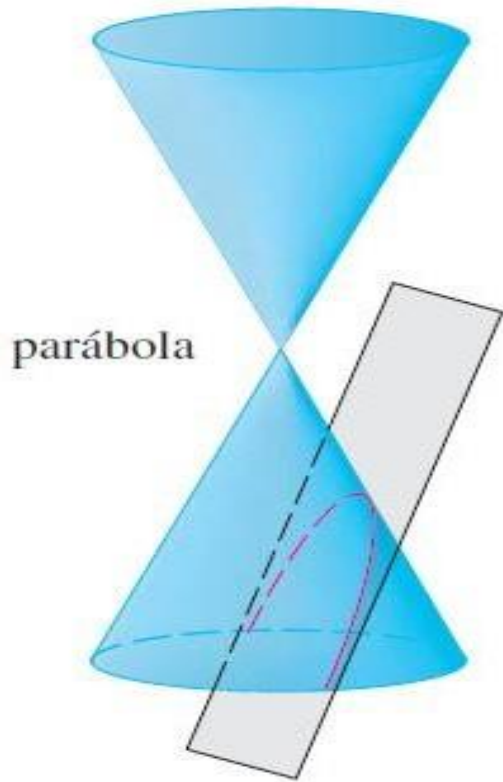
$$\mathbf{P}' = T^*(\mathbf{P}) = U^*(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = (x - x_0) \mathbf{u}^* + (y - y_0) \mathbf{u}^{*\perp}$$

donde $\mathbf{u}^* = (u_1, -u_2)$; es decir,

$$x' = u_1(x - x_0) + u_2(y - y_0)$$

$$y' = -u_2(x - x_0) + u_1(y - y_0)$$

LA PARÁBOLA



En el siglo XVI Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil disparado al aire con un ángulo respecto al suelo, es una parábola.

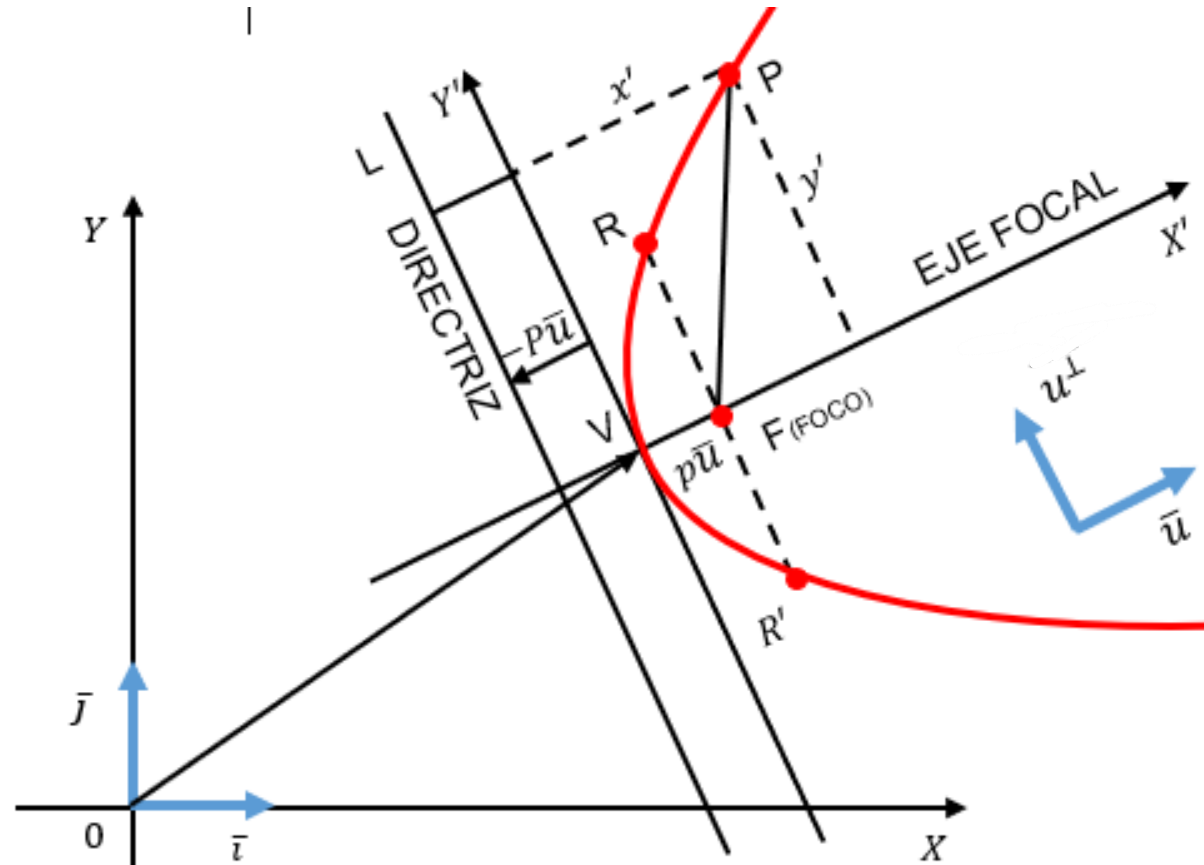
Desde entonces, las formas parabólicas se han usado en el diseño de los faros de automóviles, telescopios reflectores y puentes suspendidos.

Ecuación de la parábola

Dada una recta fija L y un punto fijo F y L se define **LA PARÁBOLA P** como el conjunto de todos aquellos puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo F (llamado FOCO) es igual a su distancia a la recta fija L (DIRECTRIZ).

Es decir:

$$d[P, F] = d[P, L]$$



Puntos y segmentos característicos

L: Recta DIRECTRIZ (con ecuación $x' = -p$); F: Foco

V: VÉRTICE (Nuevo origen de las coordenadas $x'y'$)

p: PARÁMETRO DE LA PARÁBOLA;

$\overline{RR'}$: LADO RECTO de la Parábola

Obtención de la ecuación vectorial de la parábola

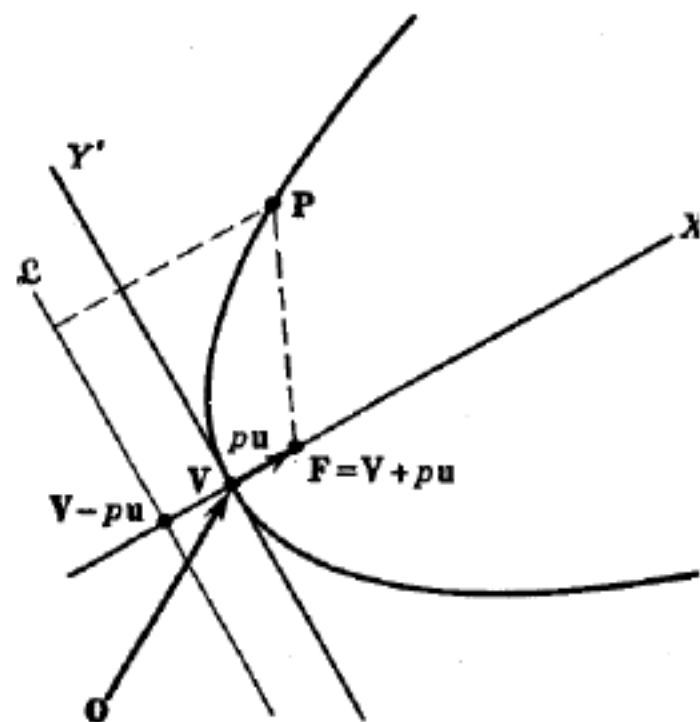
Dadas las siguientes relaciones:

$(x, y) = V + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp$ tenemos:

$$x' = [(x, y) - V] \cdot \bar{u} \ ; \ y' = [(x, y) - V] \cdot \bar{u}^\perp$$

$$L = [Q / Q = (V - p\bar{u}) + t\bar{u}^\perp, t \in R]$$

Además, como $P = (x, y) = V + x'u + y'\bar{u}^\perp$, $F = V + p\bar{u}$ donde el vértice V corresponde a la traslación (Origen del Sistema Nuevo) $(X'Y')$ y \bar{u} al vector unitario de rotación de coordenadas.



El punto **P** está sobre la parábola si y sólo si

$$d(\mathbf{P}, \mathcal{L}) = |\mathbf{P} - \mathbf{F}|$$

donde $d(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ es la distancia de **P** a \mathcal{L} . Ahora bien

$$d(\mathbf{P}, \mathcal{L}) = |p + x'|$$

$$d[P, L] = |x' + p|$$

$$\begin{aligned} d[P, F] &= |P - F| = |V + x'u + y'u^\perp - (V + p\bar{u})| \\ &= |(x' - p)\bar{u} + y'u^\perp| \end{aligned}$$

Reemplazando en la relación: $d[p, F] = d[p, L]$, o también en

$$\begin{aligned} (d[p, F])^2 &= (d[p, L])^2 \Rightarrow |(x' - p)\bar{u} + y'u^\perp|^2 = (x' + p)^2 \\ &\Rightarrow (x' - p)^2 + y'^2 = (x' + p)^2 \Rightarrow \boxed{y'^2 = 4px'} \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación vectorial de la parábola P es:

$$P: \{P/P = (x, y) = V + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp, \text{ donde } y'^2 = 4px', |\bar{u}|1\}$$

Donde: $P = (x, y)$,

$$x' = [(x, y) - V] \cdot \bar{u}$$

$$y' = [(x, y) - V] \cdot \bar{u}^\perp$$

Ecuación de la parábola con el eje focal paralelo al eje X

Corresponde al caso $\bar{u} = \bar{t}$ (NO HAY ROTACIÓN DE EJES)

$V = (h, k)$ es el vértice que corresponde a la traslación

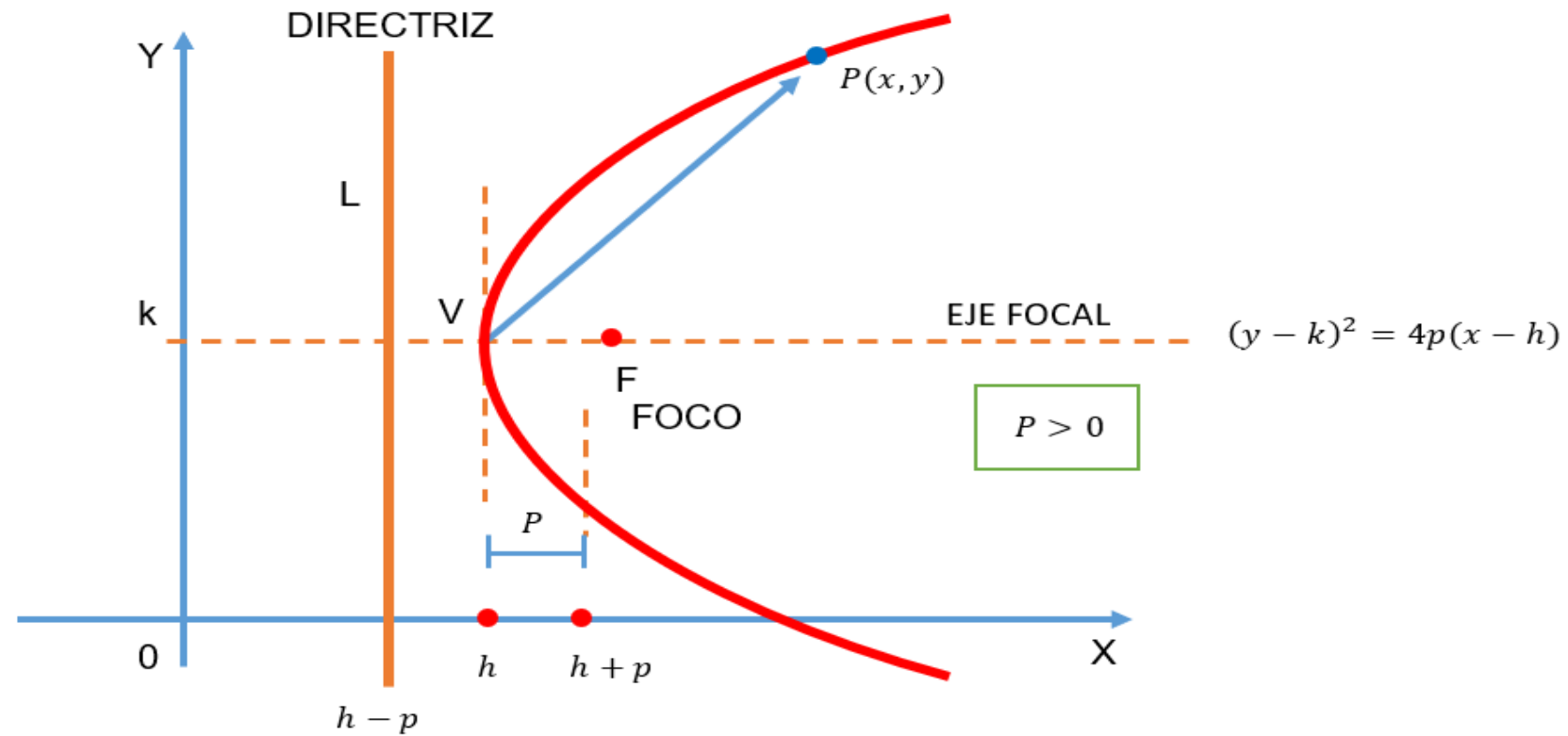
$$(x, y) = (h, k) + x'(1, 0) + y'(0, 1) = (h + x', k + y')$$

De lo cual, $x' = x - h$, $y' = y - k$

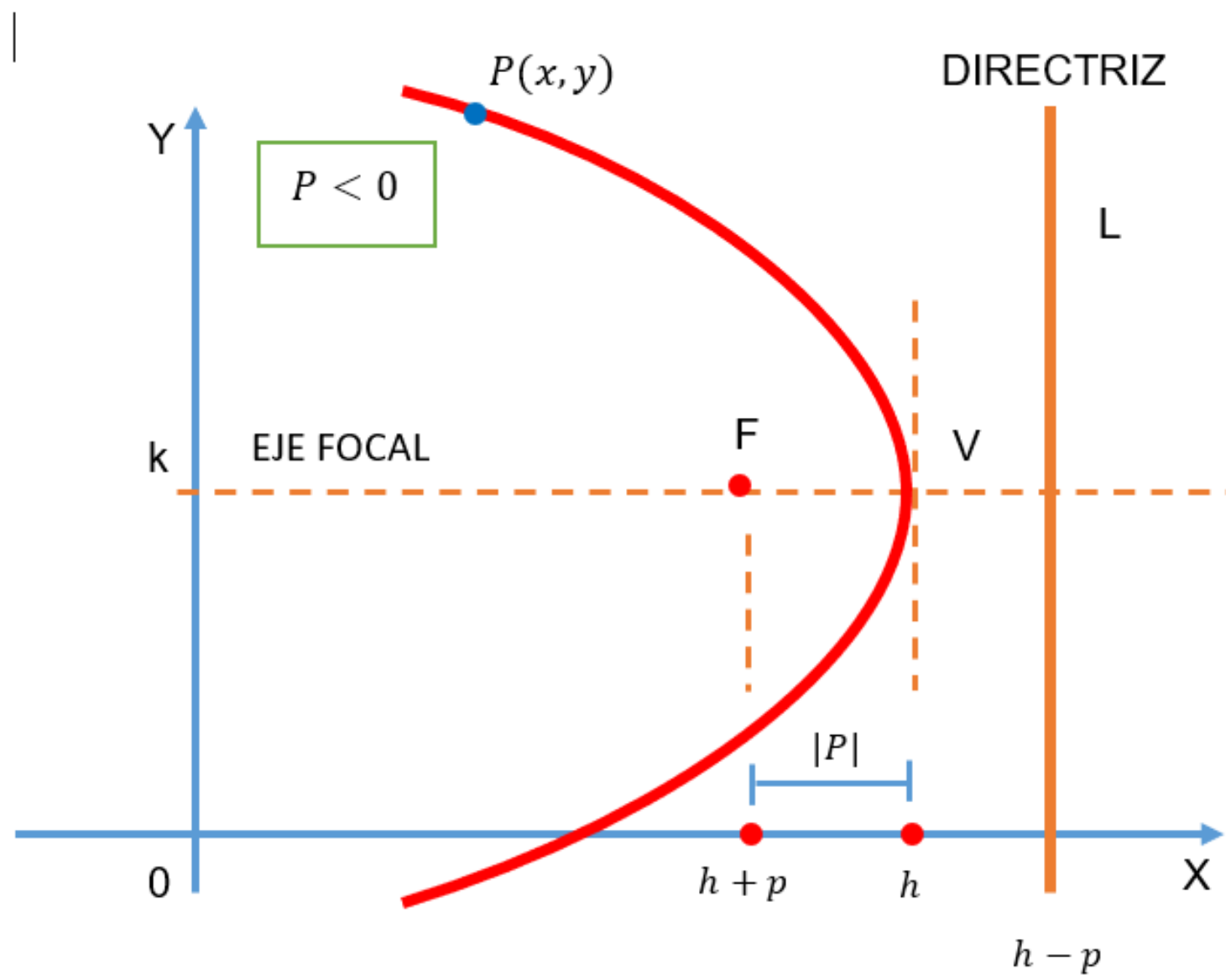
Reemplazaremos en $y'^2 = 4px' \Rightarrow (y - k)^2 = 4p(x - h)$

En tal caso, $F = V + p\bar{u} = (h + p, k)$, $L: x = h - p$

$$p\bar{u} = p\bar{i} = (p, 0)$$



Si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha
y si $p < 0$ entonces la parábola



$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación de la parábola con el eje focal paralelo al eje Y

Corresponde al caso $\bar{u} = j = (0, 1)$... ROTACIÓN DE 90° , y si $V = (h, k)$ es el vértice que corresponde a la traslación de EJES, entonces

$$x' = [(x, y) - V] \cdot \bar{u} = (x - h, y - k) \cdot (0, 1) = y - k$$

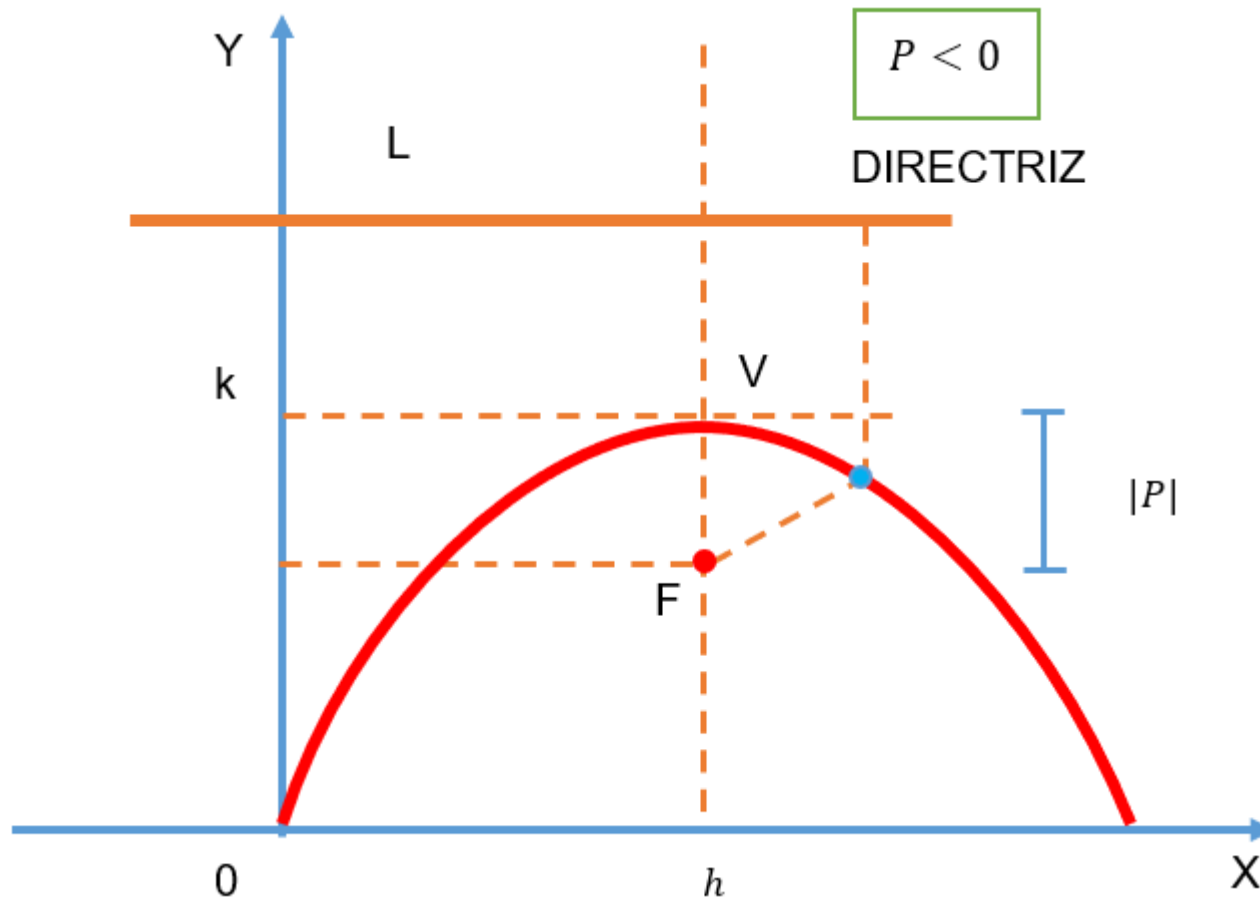
$$y' = [(x, y) - V] \cdot \bar{u}^\perp = (x - h, y - k) \cdot (-1, 0) = -(x - h)$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación $y'^2 = 4px'$

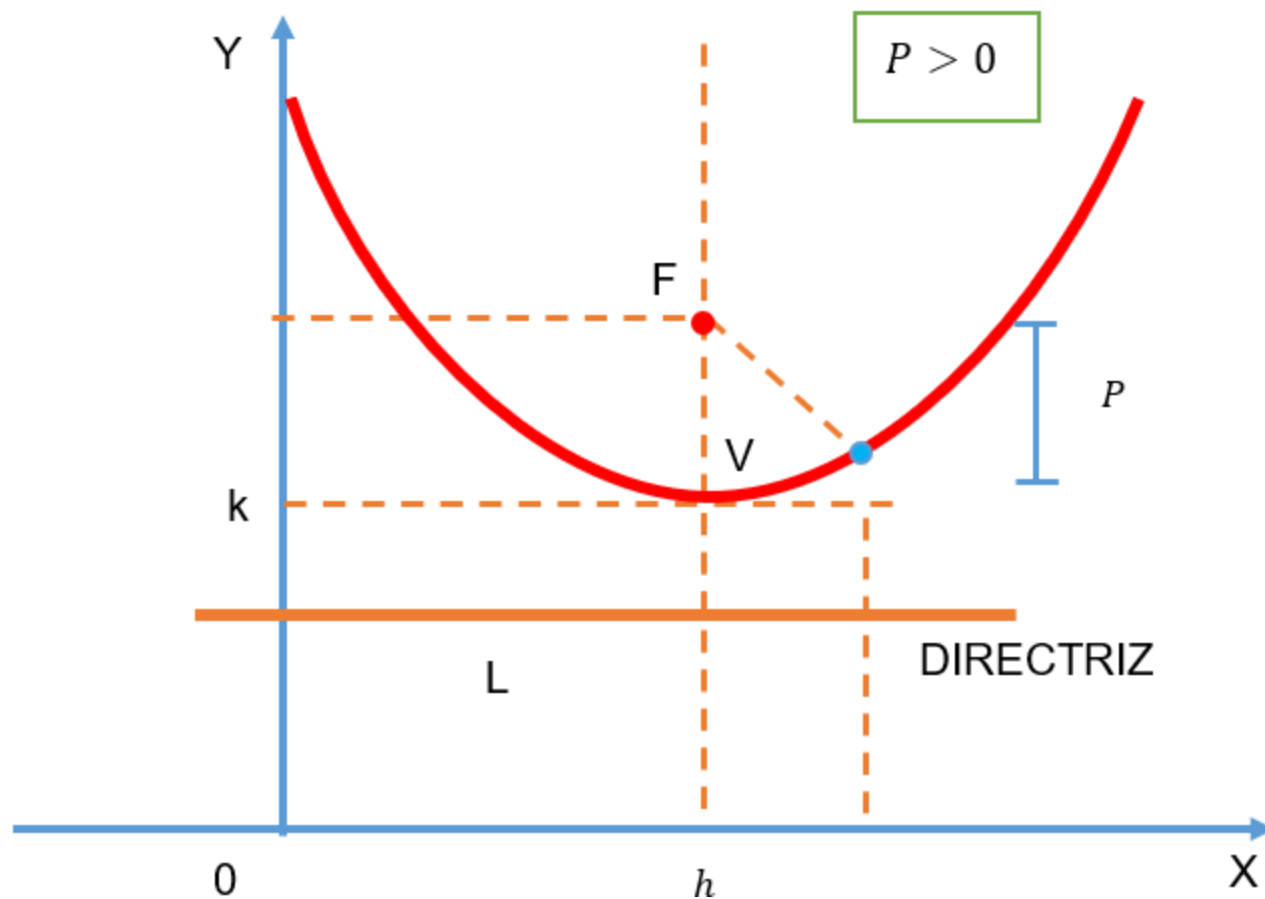
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

En tal caso, $F = V + p\bar{u} = V + pj = (h, k) + (0, p) = (h, k + p)$

LA DIRECTRIZ $L: y = k - p$



$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$



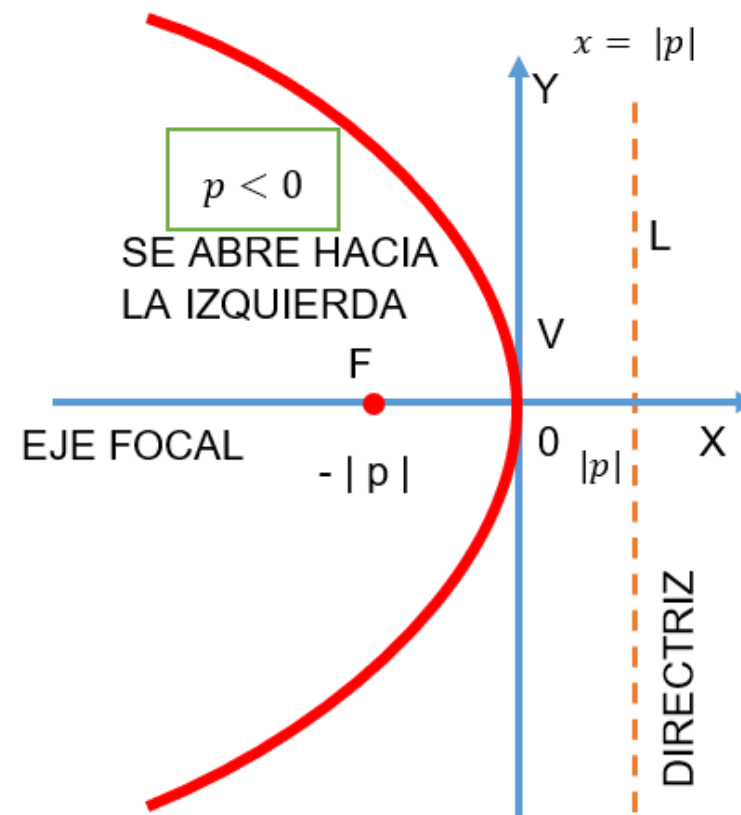
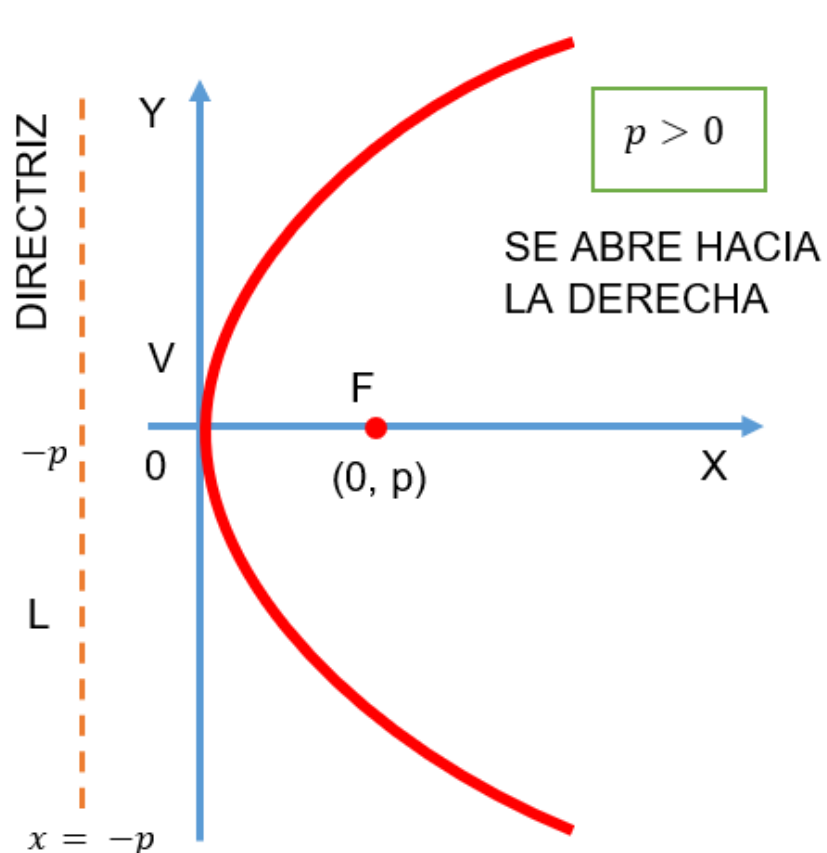
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

- Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba, y
- Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Caso particular: el vértice V en el origen

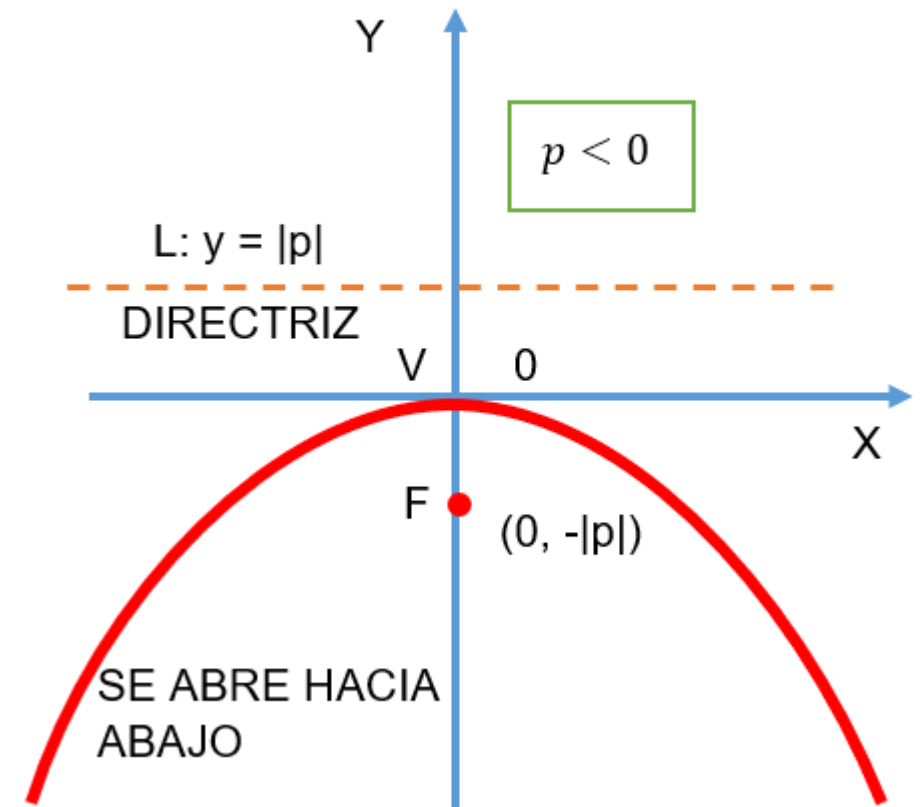
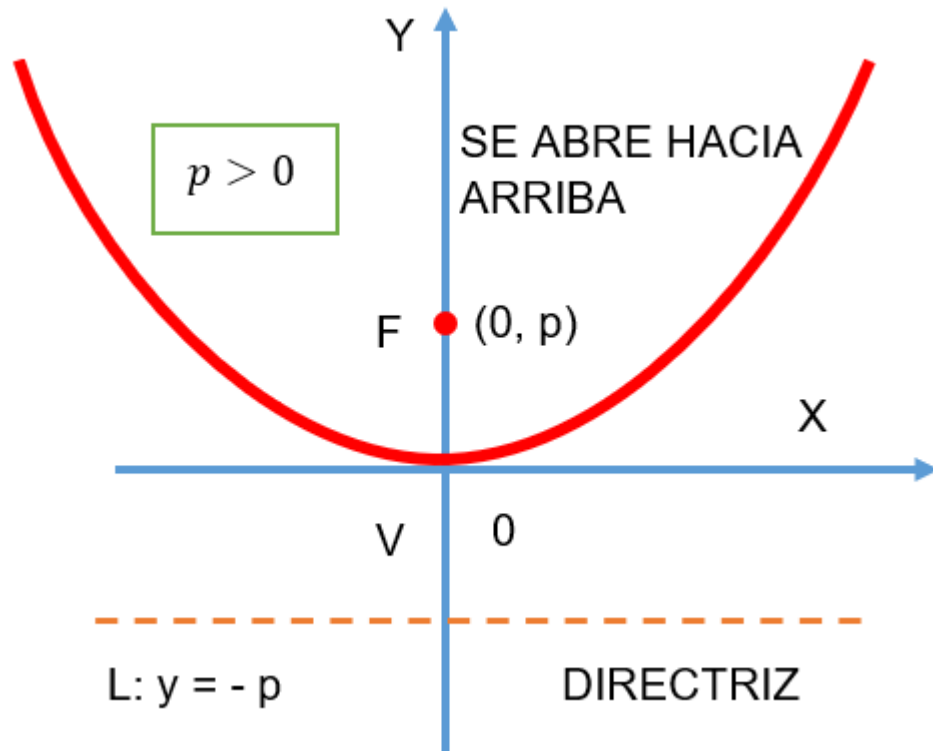
$$V = (h, k) = (0, 0)$$

Parábola con el eje X paralelo al eje focal



$$y^2 = 4px$$

Parábola con el eje Y paralelo al eje focal



$$x^2 = 4py$$

LA ELIPSE

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados FOCOS, (F_1 / F_2) separados por una distancia $2c$, y dada una constante a tal que $a > c > 0$. Se define LA ELIPSE ε como el conjunto de todos aquellos puntos P tales que la suma de las distancias de P a los focos F_1 y F_2 es constante y siempre igual a $2a$.

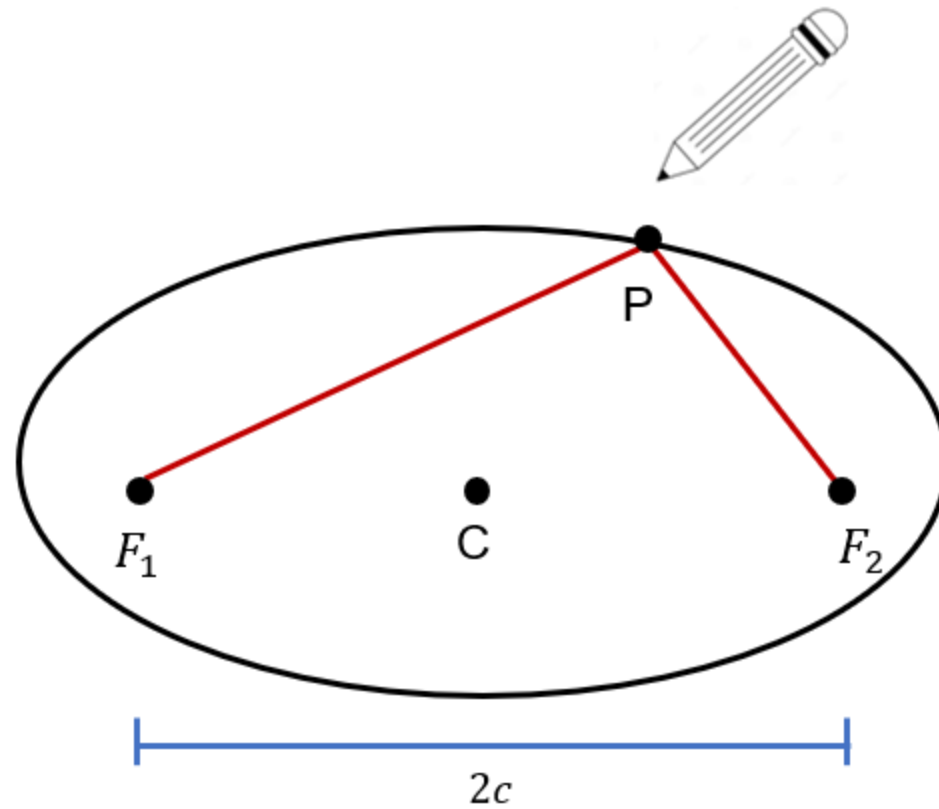
Es decir, tales que

$$d[P; F_1] + d[P; F_2] = 2a$$

O en forma equivalente, tales que

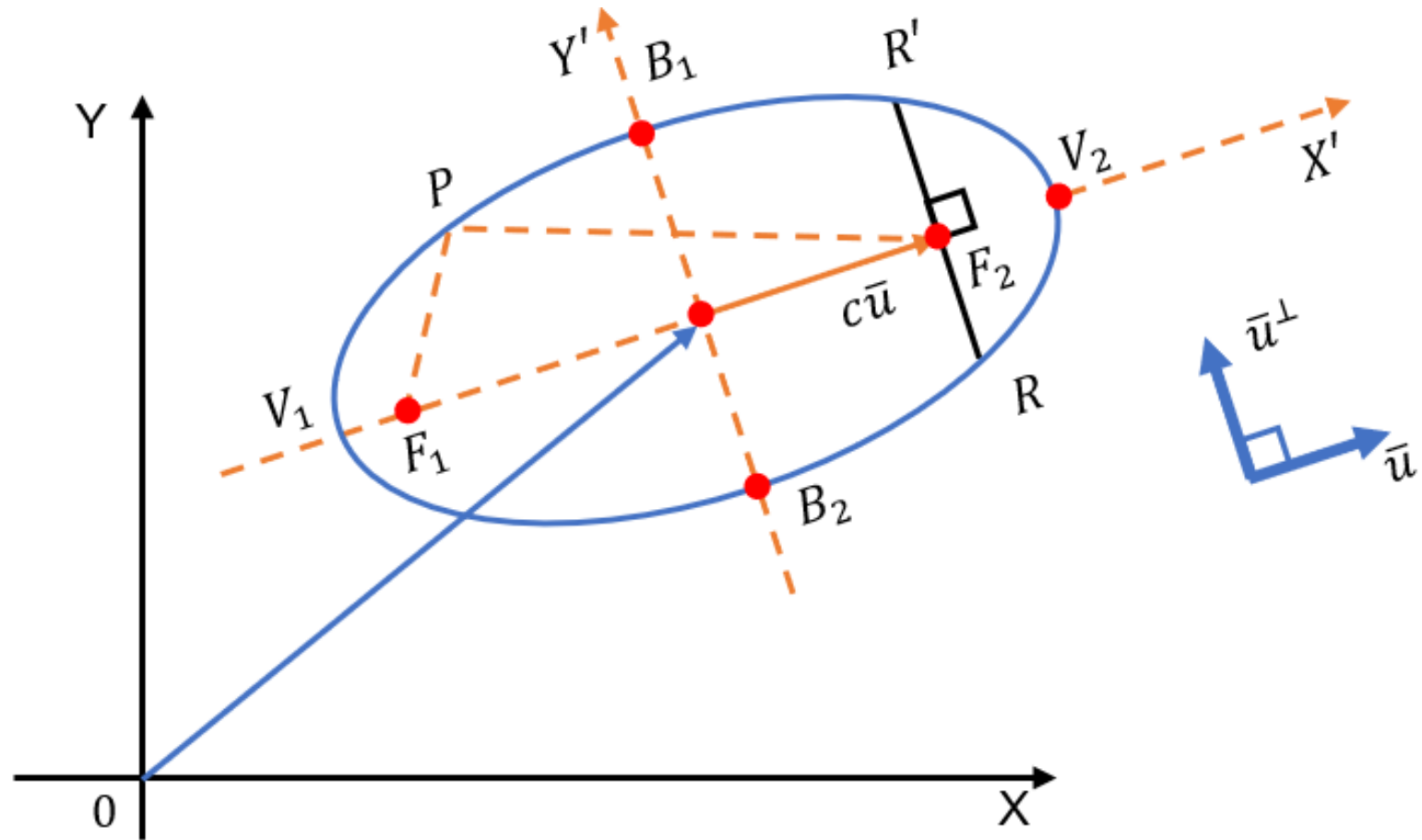
$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a$$

REPRESENTACIÓN EXPERIMENTAL DE UNA ELIPSE



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ELIPSE

Es decir, tales que



PUNTOS Y SEGMENTOS CARACTERÍSTICOS

$C = (h, k)$: Centro de la elipse ; x' : Eje focal

V_1, V_2 : Vértices; F_1, F_2 : Focos

$\overline{V_1V_2}$: Eje mayor; $\overline{RR'}$: Lado recto

$\overline{B_1B_2}$: Eje menor (de longitud $2b$)

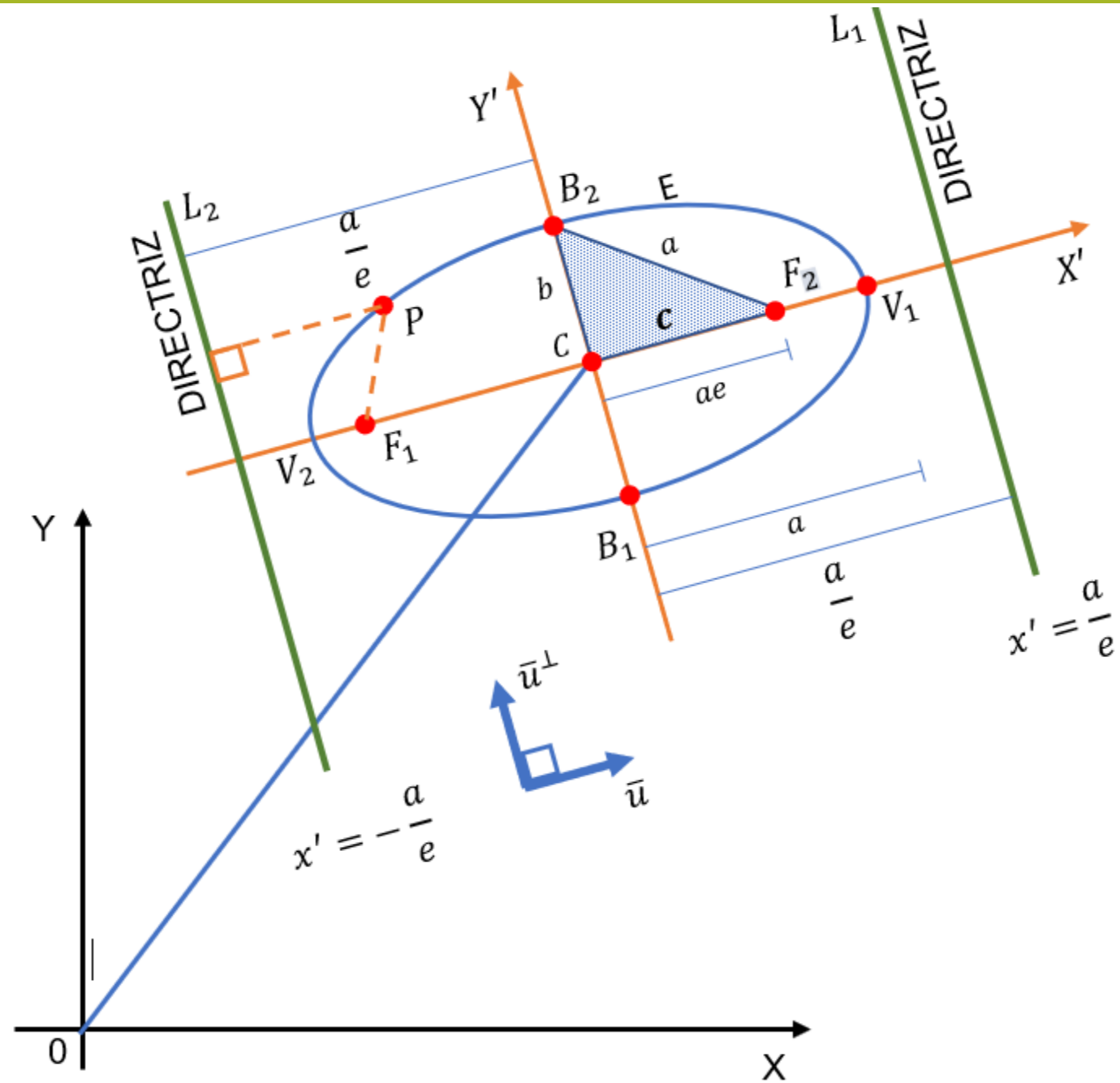
En el sistema $X'Y'$. $B_1 = (0, b)'$, $B_2 = (0, -b)'$

$F_1 = (-c, 0)'$, $F_2 = (c, 0)'$, $C = (0, 0)'$

RECTAS DIRECTRICES

Dos rectas L_1 y L_2 se llaman RECTAS DIRECTRICES de la elipse E , correspondiente a los focos F_1 y F_2 respectivamente, si es que son perpendiculares al Eje Focal de E y no cortan al segmento $\overline{F_1F_2}$, y si es que existe una constante \underline{e} (llamado EXCENTRICIDAD

de la elipse) tal que para todo punto $P \in E$ se tiene que:
$$\frac{d[P;F_1]}{d[P;L_1]} = e = \frac{d[P;F_2]}{d[P;L_2]}$$



ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

Dado $P(x, y) = C + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp$:

$$P - F_2 = C - F_2 + x' \bar{u} + y' \bar{u}^\perp = (c\bar{u}) + x' \bar{u} + y' \bar{u}^\perp \Rightarrow$$

$$|P - F_2| = |(x' + c)\bar{u} + y' \bar{u}^\perp| = \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} \dots (\alpha)$$

$$P - F_1 = C - F_1 + x' \bar{u} + y' \bar{u}^\perp = (-c\bar{u}) + x' \bar{u} + y' \bar{u}^\perp \Rightarrow$$

$$|P - F_1| = |(x' - c)\bar{u} + y' \bar{u}^\perp| = \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} \dots (\beta)$$

Reemplazando (α) y (β) en la definición:

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a, \text{ es decir}$$

$$\sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} = 2a, \text{ y operando:}$$

$$(a^2 - c^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$$

$$\text{pues } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (x'^2/a^2) + (y'^2/b^2) = 1$$

Luego, un punto $P = (x, y)$ pertenece a la elipse E si es que para el vector unitario \bar{u} de rotación de Ejes Coordinados, se tiene que

$$P = \boxed{C} + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp, \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \dots (*) \quad \text{con } |\bar{u}| = 1$$

que es llamada la **ECUACIÓN VECTORIAL DE LA ELIPSE**, y donde

$$x' = [(x, y) - C] \cdot \bar{u}, \quad y' = [(x, y) - C] \cdot \bar{u}^\perp$$

De la figura previa vemos que si $C = (h, k)$ es el centro de E y si P pertenece a la elipse, entonces

$$V = C \pm a\bar{u} \dots \text{vértices} \quad ; B = C \pm b\bar{u}^\perp \dots \text{extremos del eje menor};$$

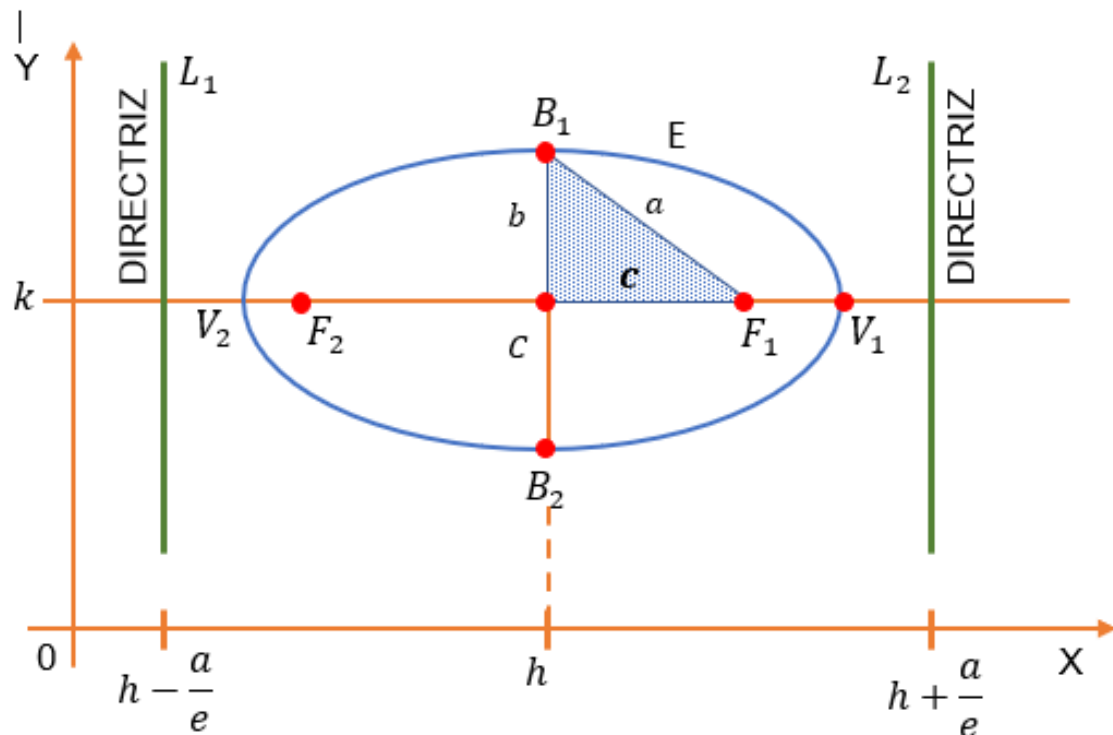
$$V = C \pm c\bar{u} \dots \text{focos}; L: x' = \pm(a/e) \dots \text{directrices}; \text{ y donde } x' = (p - C) \cdot \bar{u}, \quad P = (x, y)$$

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

Corresponde al vector $\bar{u} = \bar{t} = (1,0)$ [No hay Rotación] y si $C = (h,k)$ es el centro de la elipse E, que origina el radio vector de traslación de ejes, entonces

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$



que al reemplazar en (*) produce la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

de la elipse con EJE FOCAL PARALELO AL EJE X.

$C = (h, k)$... centro; $V = (h \pm a, k)$... vértices ;

$B = (h, k \pm b)$... extremos de $\overline{B_1 B_2}$

$F = (h \pm c, k)$... focos ; $L: x = h \pm (a/e)$... directrices

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

Corresponde a $\bar{u} = (0,1)$ [Rotación DE 90°], y si $C = (h,k)$ es el centro, que origina el radio vector de traslación de los Ejes Coordinados, entonces: $x' = (y - k)$

$$y' = -(x - h)$$

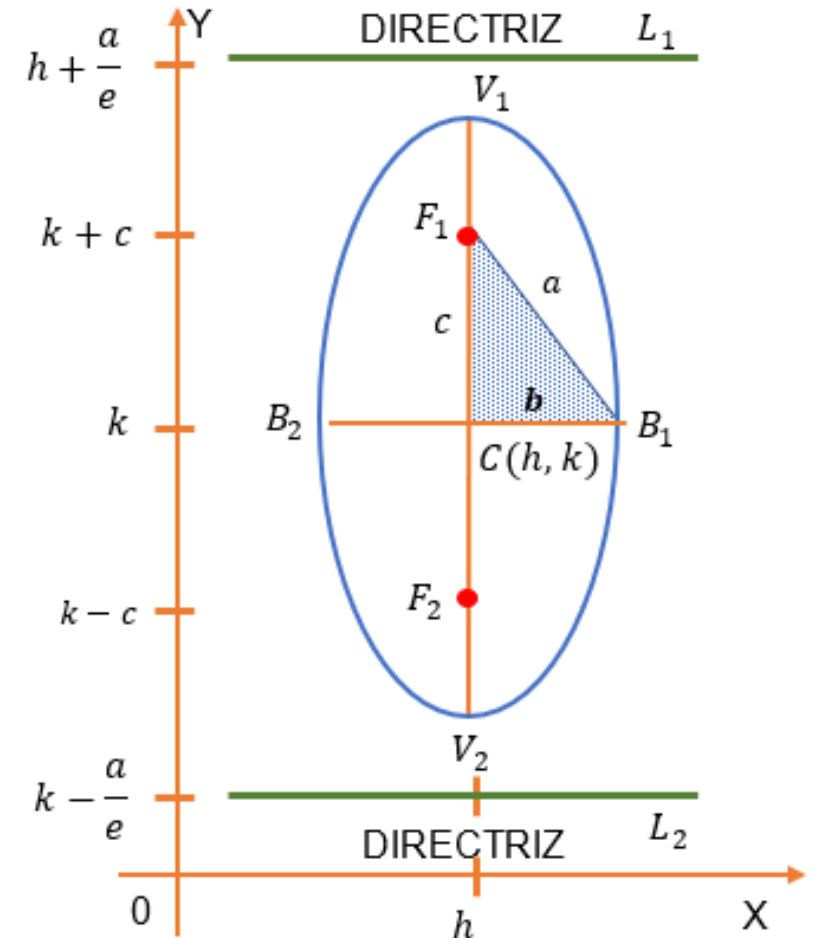
que al reemplazar en (*)

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

$$V = (h, k \pm a), F = (h, k \pm c)$$

$$B = (h \pm b, k), L: y = k \pm (a/e)$$



CASO PARTICULAR: EL CENTRO C EN EL ORIGEN

Cuando el centro $C(h, k)$ de una elipse se encuentra en el origen $(0,0)$,

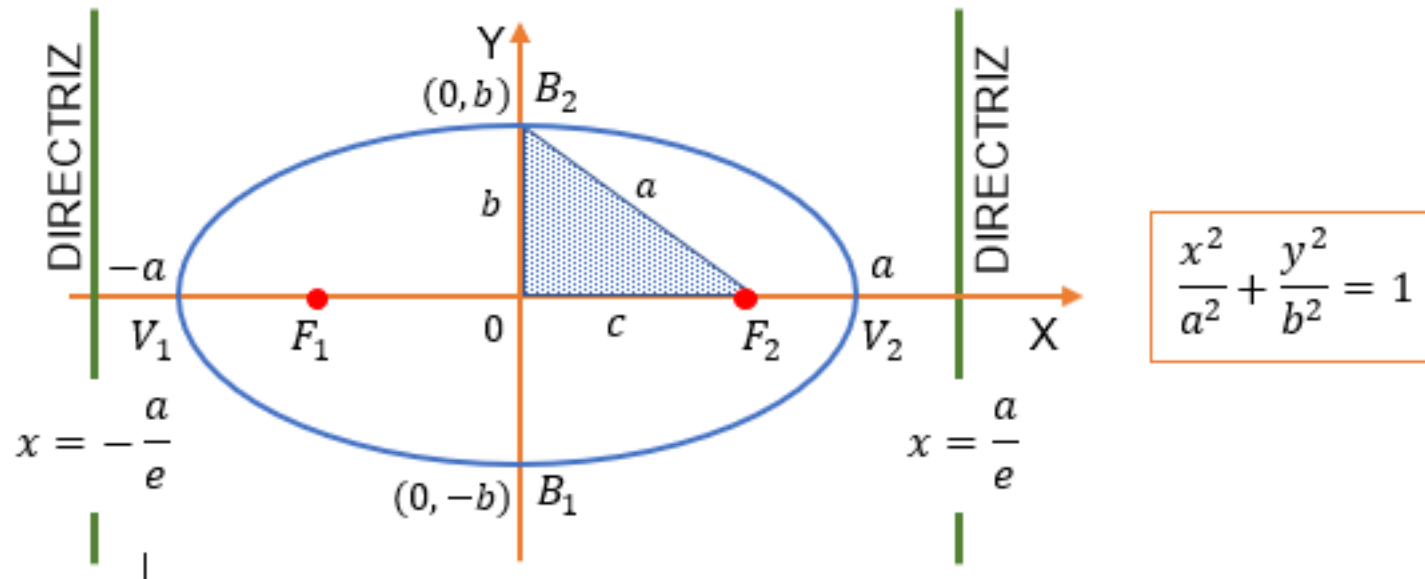
$$C = (h, k) = (0,0) \Rightarrow h = 0, k = 0$$

entonces las ecuaciones de las elipses con ejes focales paralelos al eje X y al eje Y:

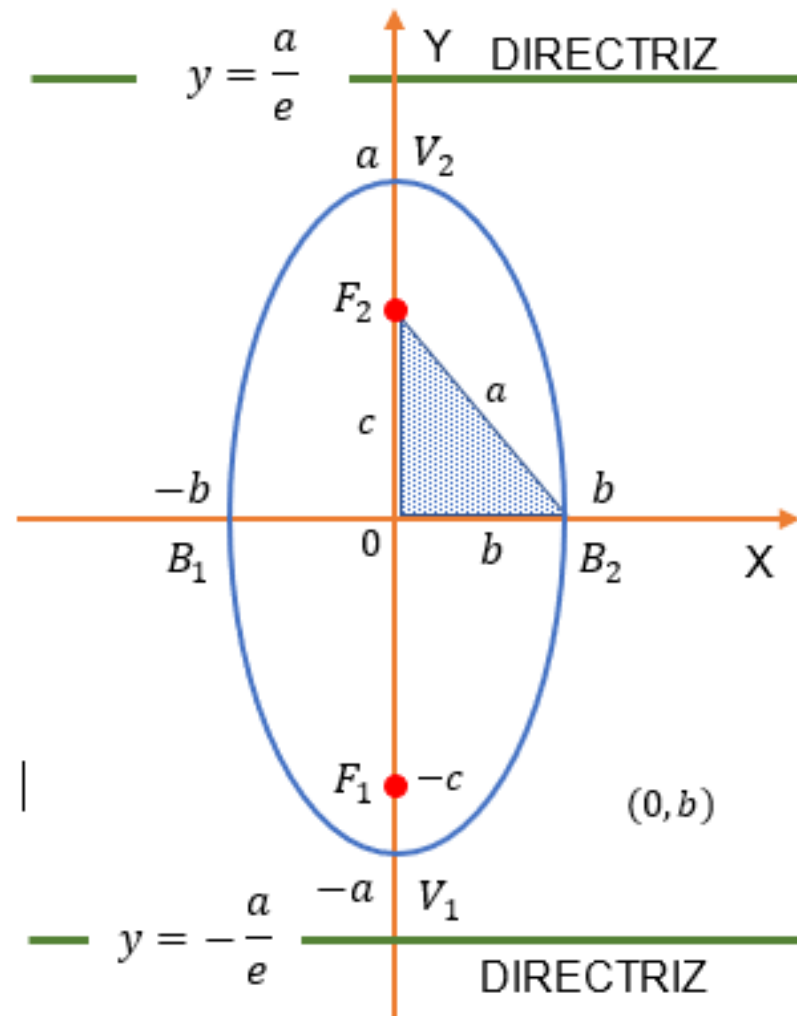
$$a) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad b) \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

respectivamente toman las formas siguientes

ELIPSE CON EL EJE X COMO EJE FOCAL



ELIPSE CON EL EJE Y COMO EJE FOCAL



$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

LA HIPÉRBOLA

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 distintos, tales que su distancia es $|F_1 - F_2| = 2c$, y dada una constante a tal que $0 < a < c$, se define una HIPÉRBOLA H como el conjunto de todos los puntos $P(x; y)$ tales que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos F_1 y F_2 , en valor absoluto, es igual a $2a$; es decir,

$$|P - F_1| - |P - F_2| = 2a$$

$C = (h, k)$: Centro de la hipérbola ; X' : Eje focal

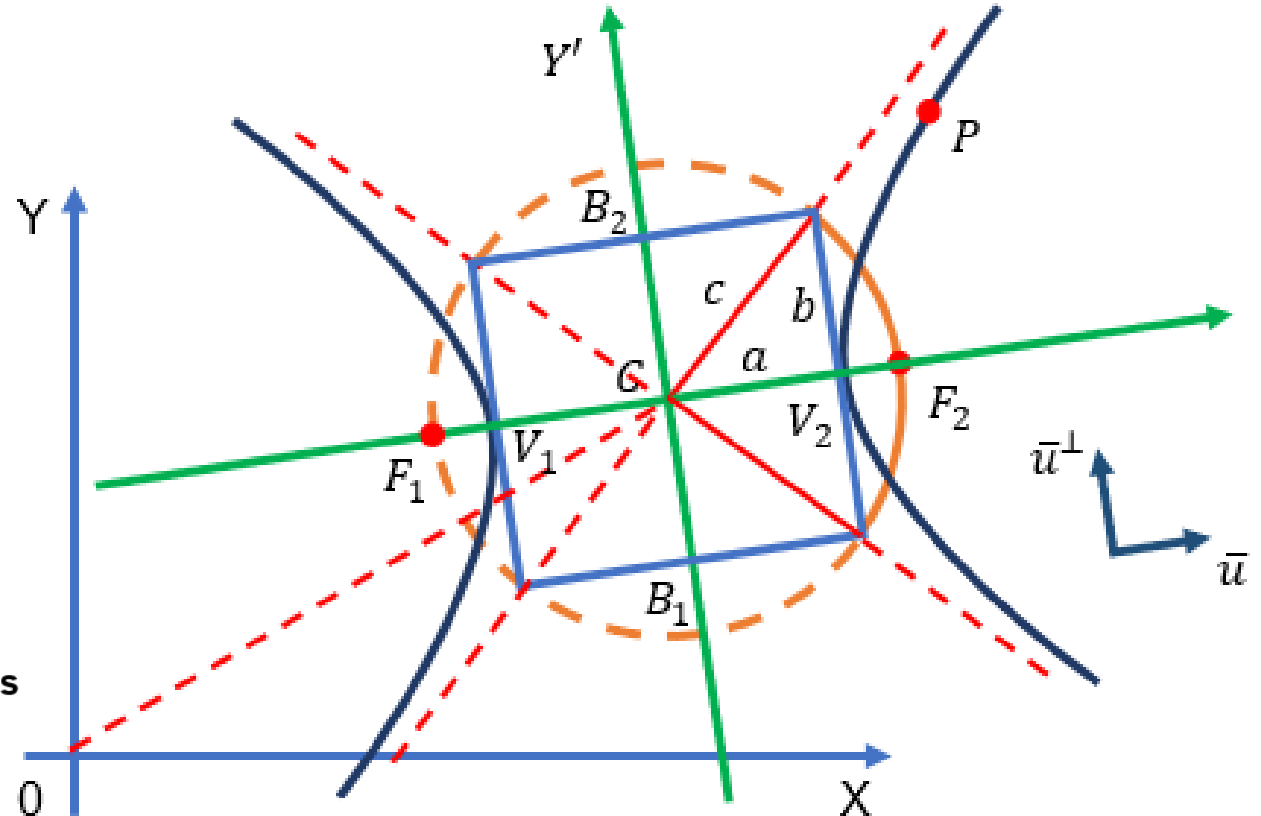
V_1, V_2 : Vértices ; F_1, F_2 : Focos

$\overline{V_1 V_2}$: Eje transverso ; $\overline{B_1 B_2}$: Eje conjugado (de longitud $2b$)

$d[C; F_1] = d[C; F_2] = c$;

$F_1 = (-c, 0)'$, $F_2 = (c, 0)'$, en el sistema coordenado $X'Y'$

C : circunferencia con centro en C , radio c , y que pasa por los dos focos F_1 y F_2 .



ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA HIPÉRBOLA H

Para todo punto $P = (x, y) = C + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp \in H$, donde C es el centro de la hipérbola, se tiene que:

Como para el caso de la elipse , hacemos

$$\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = c\mathbf{u}$$

Donde \mathbf{u} es un vector unitario en la dirección $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$.Para cada punto P de \mathbb{R}^2 hay números únicos x', y' tales que $\mathbf{P} = (x, y) = \mathbf{C} + x'\bar{\mathbf{u}} + y'\bar{\mathbf{u}}^\perp \in H$. El punto P está sobre la hipérbola H si y sólo si.

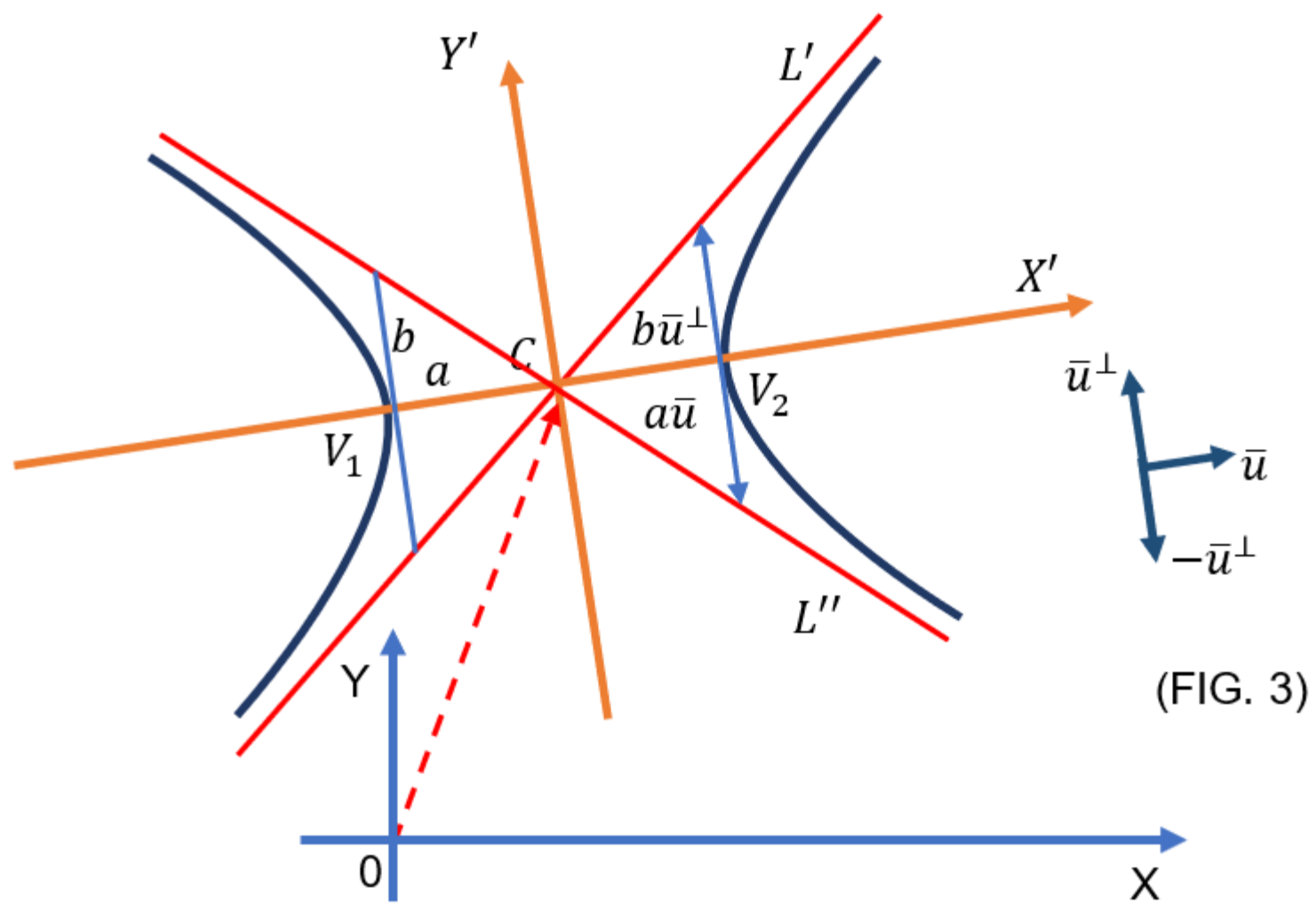
$$|P - F_1| - |P - F_2| = 2a \quad (0 < a < c)$$

$$|P - F_1| = |C - F_1 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp| = |c\bar{u} + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp|$$

$$|P - F_2| = |C - F_2 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp| = |-c\bar{u} + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp|$$

Luego tenemos:

$$\left| \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} - \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} \right| = 2a$$



Efectuando las operaciones y reduciendo, se tiene $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2 - c^2} = 1$

Pero en este caso $c > a > 0$, $a^2 - c^2 < 0$ y $a^2 - c^2 = -b^2$ ($b > 0$)

Entonces $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{a^2 - c^2} = 1$

Luego, la ecuación vectorial de la hipérbola H es:

$$\mathbf{P} = (x, y) = \mathbf{C} + x'\bar{\mathbf{u}} + y'\bar{\mathbf{u}}^\perp, \quad \text{donde}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad |\bar{\mathbf{u}}| = 1, \quad \mathbf{C} \text{ centro de H} \quad (*)$$

De la figura anterior se tiene que, siendo C el centro de H:

Vértices : $V = C + \bar{\mathbf{u}}$ Focos : $F = C + c\bar{\mathbf{u}}$

Extremos del eje conjugado: $B_1, B_2 = C \pm b\bar{\mathbf{u}}^\perp$

Directrices $L_1: x' = -\frac{a}{e}, \quad L_2: x' = \frac{a}{e}$, donde

$$x' = (P - C) \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad P = (x, y)$$

$\bar{\mathbf{u}}$: vector unitario de rotación de Ejes.

CASOS PARTICULARES DE LA ECUACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA

1. CON EL EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

Corresponde a $\bar{u} = i = (1, 0)$. No hay rotación de ejes, pero si hay traslación $C = (h, k)$.

Luego, si $P = (x, y)$

$$x' = (P - C) \cdot (1, 0)$$

$$= x - h$$

$$y' = (P - C) \cdot (0, 1)$$

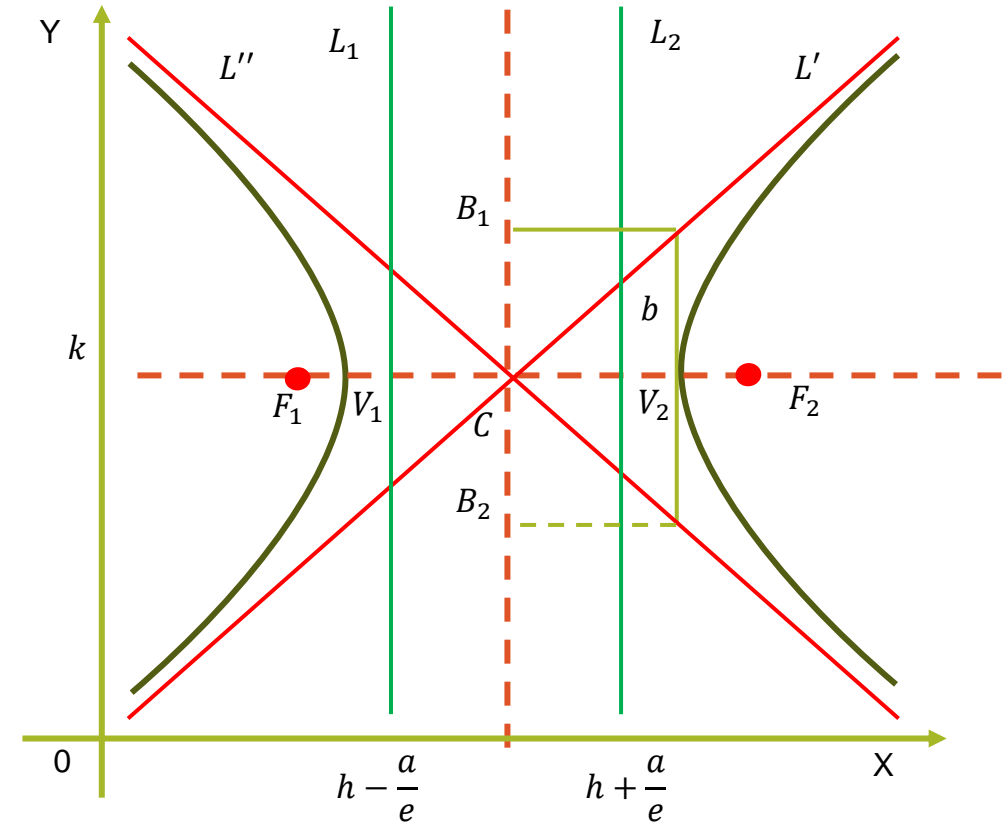
$$= y - k$$

Reemplazando en

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y'^2}{b^2}\right) = 1$$

se obtiene la forma:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



$$F_1 = (h - c, k), \quad F_2 = (h + c, k)$$

$$V_1 = (h - a, k), \quad V_2 = (h + a, k)$$

$$B_1 = (h, k + b), \quad B_2 = (h, k - b)$$

$$\text{Directrices: } L_1: x = h - \left(\frac{a}{e}\right), \quad L_2: x = h + \left(\frac{a}{e}\right)$$

$$\text{Asíntotas } L' \text{ y } L'': \text{ reemplazando } x', y' \text{ en } y' = \pm \left(\frac{b}{a}\right) x'$$

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h); \quad c = ae, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

2. CON EL EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

$$\bar{u} = j = (0, 1): \text{ Rotación de } 90^\circ;$$

$$C = (h, k) \text{ centro de H: traslación}$$

$$x' = [(x, y) - C]\bar{u} = (y - k), \quad y' = [(x, y) - C]\bar{u}^\perp = -(x - h)$$

Reemplazando en

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y'^2}{b^2}\right) = 1, \quad y' = \pm \left(\frac{b}{a}\right) x'$$

$$H: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1; \quad \text{ASÍNTOTAS: } y' = \pm \left(\frac{a}{b}\right) x'$$

$$F_1 = (h, k + c) \quad ; \quad F_2 = (h, k - c)$$

$$V_1 = (h, k + a)$$

$$V_2 = (h, k - a)$$

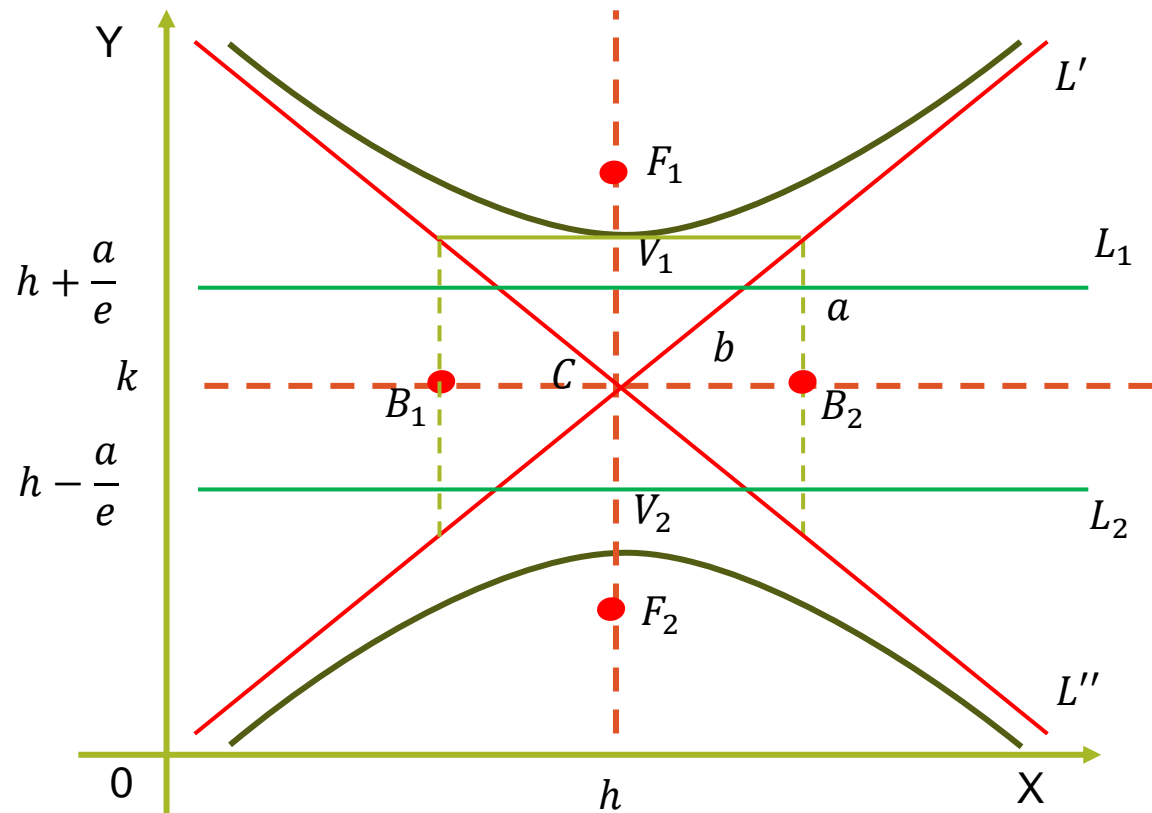
$$B_1 = (h - b, k)$$

$$B_2 = (h + b, k)$$

$$L_1: y = k + \left(\frac{a}{e}\right)$$

$$L_2: y = k - \left(\frac{a}{e}\right)$$

(DIRECTRICES)



HIPÉRBOLAS CONJUGADAS

Cuando las hipérbolas H_1 y H_2 tienen las mismas asíntotas y tienen intercambiados el eje transverso y el eje conjugado, entonces estas hipérbolas se denominan HIPÉRBOLAS CONJUGADAS.

Así, las ecuaciones

$$H_1: \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad H_2: \frac{y'^2}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} = 1$$

Corresponden a un par de hipérbolas conjugadas.

